Übungsblatt 12 - Well Separated Pair Decomposition

Ausgabe: 28. Juni 2011
Abgabe: 04. Juli 2011

Zur Erinnerung:

Die Übung am kommenden Donnerstag (30. Juni) beginnt bereits um **9:45 Uhr**.

1 Grundlegendes I

Seien A und B zwei endliche Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. Nehme an, dass die Bounding Boxen $R(A)$ und $R(B)$ von A bzw. B bekannt sind. Gebe einen Algorithmus an, der in $\mathcal{O}(1)$ Zeit enscheiden kann ob A und B bezüglich einer gegebenen Zahl $s \in \mathbb{R}$ well-separated sind.

2 Grundlegendes II

Sei $s > 0$ gegeben und sei $x := 2/s + 1$. Außerdem sei $S := \{x^i \mid 0 \leq i \leq n-1, i \in \mathbb{N}\}$. Sei $\{A_j, B_j\}$ für $1 \leq j \leq m$ eine beliebige s-WSPD für S. Zeige, dass folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{j=1}^{m}(|A_j| + |B_j|) = \binom{n}{2} + m$$

Hinweis: Für jedes j ist wenigstens eine der Mengen A_j oder B_j ein Singleton.

Bitte wenden

3 Nachbarn I

Sei P eine n-elementige Menge von Punkten aus dem $\mathbb{R}^d$. Sei $p \in P$ und der Punkt $q \in P$ der nächste Nachbar von p in P (d.h., $|pq| = \min\{|pr| : r \in P, r \neq p\}$). Betrachte nun eine beliebige s-WSPD für P mit $s > 2$.

a) Sei $\{A, B\}$ ein Paar in dieser Dekomposition. Dabei liege der Punkt p in A und der Punkt q in B. Zeige, dass dann in A nur der Punkt p enthalten sein kann.

b) Nutze das Ergebnis aus a) um zu zeigen, dass die Größe einer beliebigen s-WSPD für P mit $s > 2$ mindestens $n/2$ ist.

4 Nachbarn II

Sei P erneut eine n-elementige Menge von Punkten aus dem $\mathbb{R}^d$. Außerdem seien die Punkte $p, q \in P$ das Paar von Punkten das minimalen Abstand zueinander hat (d.h., $\min\{|ab| : a, b \in P, a \neq b\}$). Betrachte eine beliebige s-WSPD $\mathcal{W}$ für P mit $s > 2$. Zeige, dass $\mathcal{W}$ das Paar $\{\{p\}, \{q\}\}$ enthalten muss.