Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Geometrie
Sommersemester 2011
Martin Nöllenburg/Andreas Gemsa

Übungsblatt 9 - Delaunay Triangulierung

Ausgabe: 07. Juni 2011
Abgabe: 14. Juni 2011

Zur Erinnerung:

Die Übung am kommenden Donnerstag (09. Juni) beginnt bereits um 9:45 Uhr.

1 Grundlegendes zu Triangulierungen

Ein paar Grundlegende Fragestellungen zu Triangulierungen folgen. Die Menge P sei eine Menge von n Punkten die alle in $\mathbb{R}^2$ liegen.

a) Zeige, dass es keine Menge P geben kann, für die es mehr als $2^{\binom{n}{2}}$ *verschiedene* Triangulierungen gibt.

b) Gebe eine Beispielmenge P an bei der, egal wie sie trianguliert ist, es wenigstens einen Punkt gibt der Grad $n-1$ hat.

2 Grundlegendes zu Delaunay Triangulierungen

Sei eine endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ gegeben bei der alle Punkte in allgemeiner Lage sind. Sei außerdem $q \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt der zwar nicht in P enthalten ist, aber innerhalb der konvexen Hülle von P liegt. Die Punkte $p_i, p_j, p_k \in P$ seien die Eckpunkte eines Dreiecks der Delaunay Triangulierung welches q enthält (es kann maximal 2 solche Dreiecke geben). Zeige, dass qp_j, qp_i und qp_k Kanten der Delaunay-Triangulierung der Punktemenge $P' := P \cup \{q\}$.

Bitte wenden

3 Minimaler Spannbaum

Der euklidische minimale Spannbaum (EMST) einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Baum der alle Punkte aus P enthält und minimale Gesamtkantenlänge hat.

a) Zeige, dass die Kantenmenge einer Delaunay-Triangulierung von P die Kanten eines EMST enthält.

b) Nutze das Wissen aus a) um einen Algorithmus zu entwickeln, der in $\mathcal{O}(n \log n)$ einen EMST berechnet.

4 Gabriel Graphen

Der *Gabriel Graph* einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$ ist wie folgt definiert: Zwei Punkte p und q sind mit einer Kante verbunden, wenn das Innere des Kreises, dessen Durchmesser $|pq|$ ist und bei dem p und q auf dem Rand liegen, leer ist.

a) Zeige, dass die Delaunay Triangulierung von P den Gabriel-Graph von P enthält.

b) Zeige, dass p und q genau dann in dem Gabriel-Graph von P adjazent sind, wenn die Delaunay-Kante zwischen p und q die zur ihr duale Voronoi-Kante schneidet.

c) Gebe einen $\mathcal{O}(n \log n)$ Algorithmus an um einen Gabriel-Graph für eine beliebige Menge von n Punkten zu berechnen.