Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmische Geometrie
Sommersemester 2011
Martin Nöllenburg/Andreas Gemsa

Übungsblatt 8 v.1.1 - Voronoi Diagramme

Ausgabe: 31. Mai 2011
Abgabe: 07. Juni 2011

1 Voronoi-Zellen

Sei Vor(P) ein Voronoi Diagramm für die Menge P bestehend aus n Punkten. Eine einzelne Voronoi-Zelle in Vor(P) besteht aus maximal $n - 1$ Kanten. Naiv könnte man jetzt annehmen, dass die Komplexität von Voronoi Diagrammen quadratisch ist. Allerdings kann man beweisen, dass die Komplexität nur linear ist. Zeige dazu, dass die durchschnittliche Anzahl an Kanten aller Voronoi-Zellen in Vor(P) nicht größer als 6 sein kann.

2 'Beach-Line'

In der Vorlesung wurde erklärt, dass man ein Voronoi-Diagramm mit Hilfe einer 'Beach-Line' konstruieren kann.

a) Gib ein Beispiel an, bei dem eine Parabel (festgelegt durch ein Punkt p_i) mehr als einen Kreisbogen zu einer 'Beach-Line' beisteuert.

b) Ist es möglich, dass eine einzelne Parabel eine lineare Anzahl an Kreisbögen zu einer 'Beach-Line' beisteuert? [Erläutern]

3 Nächster Nachbar

Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene und sei Vor(P) das dazugehörige Voronoi-Diagramm. Gebe einen Algorithmus an, der in $O(n)$ Zeit zu jedem Punkt p in P einen anderen Punkt $a(p)$ in P bestimmt, der p am nächsten liegt.

Bitte wenden

4 Atom-Kraftwerke

Aus aktuellem Anlass eine Aufgabe zu Atomkraftwerken. Angenommen, du bist ein Atomkraftgegner, der möglichst weit von den ihm bekannten Atomkraftwerken entfernt leben möchte. Gleichzeitig willst du aber innerhalb eines von Dir bevorzugten Gebietes wohnen. Diese Situation kann man wie folgt formalisieren: Die Menge der Atomkraftwerke werde durch eine Menge S von Punkten in der Ebene repräsentiert. Das von Dir bevorzugte Wohngebiet sei der Einfachheit halber durch ein Rechteck R modelliert. Gesucht ist nun ein Punkt $p \in R$ (Dein Wohnort), dessen Abstand $\min_{s \in S} d(p, s)$ zum nächstgelegenen AKW maximal ist.

a) Zeige, dass jeder optimale Wohnort entweder eine Ecke des Voronoi-Diagramms $\mathrm{Vor}(S)$, eine Ecke von R, oder ein Schnittpunkt des Randes von R mit einer Kante von $\mathrm{Vor}(S)$ ist.

b) Gebe einen Algorithmus an, der in $O(n)$ Zeit einen optimalen Wohnort findet, wenn das Voronoi-Diagramm $\mathrm{Vor}(S)$ bereits bekannt ist. Hierbei ist n die Anzahl der Punkte in S.

c) Es sei nun angenommen, dass sich der Wohnort innerhalb eines vorgegebenen konvexen Polygons P mit m Ecken befinden muss. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit von $O(m+n)$ an, der unter dieser Voraussetzung einen optimalen Wohnort findet. Es sei wieder angenommen, dass das Voronoi-Diagramm $\mathrm{Vor}(S)$ schon bekannt ist.