

Übungsblatt 1 - Konvexe Hülle

Ausgabe: Dienstag, 14. April 2011

Abgabe: Dienstag, 19. April 2011

1 Einstieg

In einigen Verfahren zur Berechnung der konvexen Hülle muss man bestimmen ob ein Punkt links oder rechts von einer gegebenen Linie liegt. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass man das mit Hilfe der Berechnung der Determinante einer bestimmten Matrix durchführen kann. Im Folgenden soll diese Behauptung bewiesen werden.

Seien die Punkte $p = (p_x, p_y)$, $q = (q_x, q_y)$ und $r = (r_x, r_y)$ gegeben. Dabei verläuft eine gerichtete Gerade g durch die Punkte p und q . Der Punkt r liegt nicht auf g .

- a) Beweise, dass das Vorzeichen der Determinante $\det(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{pmatrix}$$

anzeigt ob r sich links oder rechts von g befindet.

- b) Da sich die drei Punkte p, q und r in allgemeiner Lage befinden induzieren sie ein Dreieck. Zeige, dass $|\det(A)|$ der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks ist.

2 Grundlegendes zu konvexen Hüllen

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass in der Mathematik gewöhnlicherweise die konvexe Hülle einer Menge P definiert ist als der Schnitt aller konvexen Mengen die P enthalten.

(Formal: $CH(P) := \bigcap_{C \supseteq P: C \text{ ist konvex}} C$)

Außerdem wurde folgendes Lemma eingeführt:

Lemma 1. Für eine endliche Punktmenge $P \in \mathbb{R}^2$ ist $CH(P)$ ein konvexes Polygon, das P enthält und dessen Ecken in P liegen.

bitte umblättern

Im Folgenden soll Lemma 1 bewiesen werden. Zeige dazu:

- a) Die konvexe Hülle $CH(P)$ enthält alle Punkte aus P . (Folgt direkt aus der Definition. *Kein* Beweis erforderlich)
- b) Zeige, dass der Schnitt zweier konvexer Mengen wieder eine konvexe Menge ist. Das impliziert, dass der Schnitt einer beliebigen Anzahl konvexer Mengen ebenfalls konvex ist. Insbesondere bedeutet das, dass $CH(P)$ konvex ist.
- c) Zeige nun, dass $CH(P)$ ein Polygon ist.
- d) Abschließend gilt es nur noch zu zeigen, dass alle Ecken von $CH(P)$ in P liegen.

Aus a)-d) folgt die Korrektheit von Lemma 1.

3 Optimalität!

Von einem Algorithmus, der eine konvexe Hülle berechnet, fordern wir, dass er sie als Liste ausgibt, welche die Ecken des entsprechenden Polygons im Uhrzeigersinn durchläuft.

- a) Zeige, dass jeder Algorithmus zur Berechnung der konvexen Hülle von n Punkten eine Laufzeit von $\Omega(n \log n)$ benötigt, was bedeutet, dass der Algorithmus aus der Vorlesung optimal im Sinne der asymptotischen Laufzeit ist.
Hinweis: Benutze, dass die *Sortierung* von n Schlüsseln (in gewissen Rechnermodellen) eine Laufzeit von $\Omega(n \log n)$ benötigt.
- b) Gegeben sei ein einfaches, nicht notwendigerweise konvexes Polygon in der üblichen Listenrepräsentation. Gebe einen Algorithmus an, der die konvexe Hülle der Eckenmenge dieses Polygons in $\mathcal{O}(n)$ Zeit berechnet. Erläutere, warum dies keinen Widerspruch zum Ergebnis aus Teilaufgabe a) darstellt.